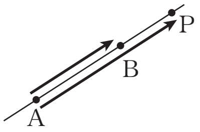
PART2 一直線上の点

要点 ① 3 点が一直線上にある条件

異なる 3 点 A，B，P が一直線上にあるとき，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は平行である。よって，ベクトルの平行条件から，次のことが成り立つ。



3 点が一直線上にある条件

2 点 A，B が異なるとき

3 点 A，B，P が一直線上にある $\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす実数 k が存在する

例 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}+3\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}$ のとき

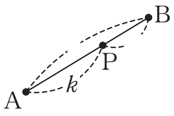
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{3}(\qquad\qquad)=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

よって，3 点 A，B，P は一直線上にある。

また，AP：PB＝　：

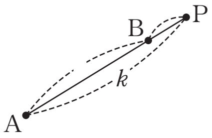
異なる 3 点 A，B，P が一直線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす実数 k が存在する。$k\neq 0$ かつ $k\neq 1$ のとき，点 P は線分 AB を次のような比に内分または外分する。

$0<k<1$ のとき



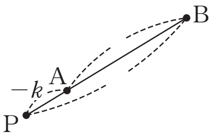
k：　　に内分する

$k>1$ のとき



k：　　に外分する

$k<0$ のとき

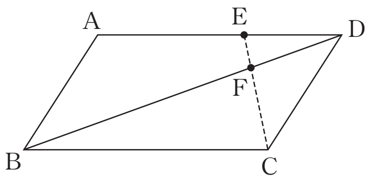


$(-k)$：　　に外分する。

※$k=0$ のときは点 P は点 A と一致し，$k=1$ のときは点 P は点 B と一致する。

[MEMO]

2 平行四辺形 ABCD において，辺 AD を 3：2 に内分する点を E，対角線 BD を 5：2 に内分する点を F とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ として, 次の問いに答えよ。



(1) $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AF}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

(2) 3 点 E，F，C は一直線上にあることを示せ。

Point Pickup

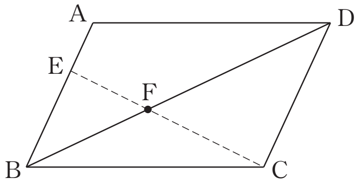
3 点が一直線上にある条件

2 点 A，B が異なるとき

3 点 A，B，P が一直線上にある $\iff$ $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$ を満たす実数 k が存在する

第 4 講　PART2 確認問題

平行四辺形 ABCD において，辺 AB を 1：2 に内分する点を E，対角線 BD を 2：3 に内分する点を F とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ として，次の問いに答えよ。



1　$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AF}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

$\overrightarrow{AC}=\boxed{\text{ア}}$，$\overrightarrow{AE}=\boxed{\text{イ}}$，$\overrightarrow{AF}=\boxed{\text{ウ}}$

① $\frac{1}{3}\vec{b}$　② $\frac{2}{3}\vec{b}$　③ $\frac{1}{3}\vec{d}$　④ $\frac{2}{3}\vec{d}$

⑤ $\vec{b}+\vec{d}$　⑥ $\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{d}$　⑦ $\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{d}$

⑧ $\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{d}$

2　3 点 E，F，C が一直線上にあることを示す。

$\overrightarrow{EC}$ と $\overrightarrow{EF}$ を $\vec{b}$ と $\vec{d}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{EC}=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\vec{b}+\vec{d}$$

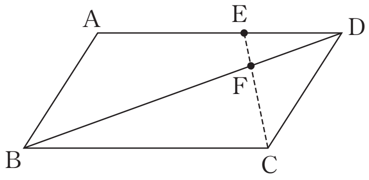
$$\overrightarrow{EF}=\frac{4}{\boxed{\text{カキ}}}\vec{b}+\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\vec{d}$$

よって，$\overrightarrow{EF}=\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\overrightarrow{EC}$ より，

3 点 E，F，C は一直線上にある。

PART2 一直線上の点

2 平行四辺形ABCDにおいて，辺ADを3：2に内分する点をE，対角線BDを5：2に内分する点をFとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ として, 次の問いに答えよ。



(1) $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AF}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

(2) 3点E，F，Cは一直線上にあることを示せ。

[解答]

(1) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{b}+\vec{d}$

$$\overrightarrow{AE}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AD}=\frac{3}{5}\vec{d}$$

$$\overrightarrow{AF}=\frac{2\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AD}}{5+2}=\frac{2\vec{b}+5\vec{d}}{5+2}=\frac{2}{7}\vec{b}+\frac{5}{7}\vec{d}$$

(2) $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}=(\vec{b}+\vec{d})-\frac{3}{5}\vec{d}=\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{d}$

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\left(\frac{2}{7}\vec{b}+\frac{5}{7}\vec{d}\right)-\frac{3}{5}\vec{d}=\frac{2}{7}\vec{b}+\frac{4}{35}\vec{d}=\frac{2}{7}\left(\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{d}\right)$$

よって，$\overrightarrow{EF}=\frac{2}{7}\overrightarrow{EC}$ より，3点E，F，Cは一直線上にある。

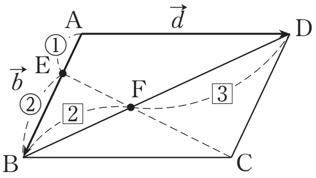
第 4 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：⑤，イ：①，ウ：⑧

[解説]

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$
$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$$
$$=\vec{b}+\vec{d}$$



AE：EB＝1：2 より

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$=\frac{1}{3}\vec{b}$$

BF：FD＝2：3 より

$$\overrightarrow{AF}=\frac{3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}}{2+3}$$ [A]
$$=\frac{3\vec{b}+2\vec{d}}{5}$$
$$=\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{d}$$

[A]　2点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を結ぶ線分ABを $m:n$ に内分する点Pの位置ベクトル $\vec{p}$ は

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

2 **[正解]** **エ**：2，**オ**：3，**カキ**：15，**ク**：2，**ケ**：5，
コ：2，**サ**：5

[解説]

$\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ を $\vec{b}$ と $\vec{d}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}+\vec{d},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{1}{3}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{d}$$

これより

$$\overrightarrow{\mathrm{EC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$
$$=(\vec{b}+\vec{d})-\frac{1}{3}\vec{b}$$
$$=\boldsymbol{\frac{2}{3}\vec{b}+\vec{d}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$
$$=\left(\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{d}\right)-\frac{1}{3}\vec{b}$$
$$=\boldsymbol{\frac{4}{15}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{d}}$$
$$=\frac{2}{5}\left(\frac{2}{3}\vec{b}+\vec{d}\right)$$

よって

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{EC}}}$$ [B]

より，3点E，F，Cは一直線上にある。

[B]　2点A，Bが異なるとき，
3点A，B，Pが一直線上にある
$\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす実数 k が存在する